$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c.$$

$$\int \frac{dx}{k^2+x^2} = \qquad k \neq 0.$$

$$= \int \frac{dx}{k^2\left(1+\frac{x^2}{k^2}\right)} = \frac{1}{k^2}\int \frac{dx}{1+\frac{x^2}{k^2}}$$

$$\frac{x}{k} = t \qquad dx = k\,dt$$

$$= \frac{1}{k^{\cancel{2}}} \int \frac{\cancel{k}\,dt}{1+t^2} =$$

$$= \frac{1}{k} \operatorname{arctg} t + c =$$

$$= \frac{1}{k} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{k}\right) + c$$

3) nessuna radice reale.

$$x^2+px+q = x^2+px+\frac{p^2}{4}-\frac{p^2}{4}+q =$$

$$= \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right)$$

se non ci sono radici reali

$$q-\frac{p^2}{4} > 0.$$

quindi

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)} =$$

$$t = x+\frac{p}{2} \qquad dt = dx$$

$$= \int \frac{dt}{t^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)} \quad > 0$$ che è

del tipo $$\int \frac{dt}{t^2+k^2}$$

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+10} = \int \frac{dx}{x^2+2x+1-1+10} =$$

$$= \int \frac{dx}{(x+1)^2+9}$$

$x+1=t \quad dx = dt$

$$= \int \frac{dt}{t^2+9} = \frac{1}{9}\int \frac{dt}{\frac{t^2}{9}+1}$$

$s = \frac{t}{3} \quad t = 3s$

$dt = 3\,ds$

$$= \frac{1}{9}\int \frac{3\,ds}{s^2+1} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}(s)+c$$

$$= \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{t}{3}\right)+c = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{3}\right)+c$$

$$\int \frac{ax+b}{x^2+cx+d}\,dx = \frac{a}{2}\int \frac{2x+\frac{2b}{a}}{x^2+cx+d} =$$

$$= \frac{a}{2}\int \frac{2x+c}{x^2+cx+d} + \frac{\frac{2b}{a}-c}{x^2+cx+d}\,dx =$$

$$= \frac{a}{2}\log\left|x^2+cx+d\right| + \int \frac{b-\frac{c}{2}\cdot a}{x^2+cx+d}\,dx$$

<u>Es</u>: $$\int \frac{4x+5}{x^2+2x-1}\,dx = 2\int \frac{2x+\frac{5}{2}}{x^2+2x-1}\,dx$$

$$= 2\int \frac{2x+2-2+\frac{5}{2}}{x^2+2x-1}\,dx$$

$$= 2\int \frac{2x+2}{x^2+2x-1}\,dx + 2\int \frac{\frac{1}{2}}{x^2+2x-1}\,dx =$$

$$= 2\log\left|x^2+2x-1\right| + \int \frac{dx}{x^2+2x-1}$$

# Equazioni differenziali ordinarie

$y = y(x)$ funzione
derivabile $n$ volte
$F$ di $n+2$ variabili

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

si dice equazione differenziale ordinaria di ordine $n$.

Es: $\cos(y') + y^3 + e^x + \lg x = 0$

eq. diff. di ordine 1.

$$e^{y''} - \log y + \operatorname{tg} x = 0$$

è un eq. diff. di ordine 2

L'incognita è la funzione $y(x)$.

Es: $y' = x^2$

soluzione

$$y(x) = \frac{x^3}{3} + c$$

Es: $y' = y$

soluz. $y(x) = e^x$

$y = e^x + c$ è soluzione?

No: $y' = e^x$

$e^x \neq e^x + c$

$y(x) = k e^x$ è soluzione.

Es: $y'' = y$

soluz: $y(x) = e^x$

$y(x) = k e^x$

$y(x) = e^{-x}$

$$y' = -e^{-x}$$

$$y'' = -(-e^{-x}) = e^{-x} = y \,.$$

$y(x) = k \cdot e^{-x}$ è soluzione

$$y(x) = k_1 e^{x} + k_2 e^{-x}$$

$$y' = k_1 e^{x} - k_2 e^{-x}$$

$$y'' = k_1 e^{x} + k_2 e^{-x} = y$$

Es: $y'' = -y$

$y(x) = \cos x$

$y(x) = \sin x$

$y(x) = k_1 \cos x + k_2 \sin x$ .

# Problema di Cauchy.

$$\begin{cases} y^{(n)}(x) = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

con $x_0, y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$ fissati fisso un punto $x_0$ e il valore della funzione e delle sue derivate fino all'ordine $n-1$ in quel punto.

Es: $\begin{cases} y'' = -y \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$

$y(x) = k_1 \cos x + k_2 \sin x$

$y(0) = 0$

$k_1 \cos 0 + k_2 \sin 0 = 0$

$k_1 \cdot 1 + k_2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow k_1 = 0$

$$y' = -k_1 \sin x + k_2 \cos x$$

$$y'(0) = -k_1 \cdot 0 + k_2 \cdot 1$$

deve essere $y'(0) = 1$

$$\Rightarrow \quad k_2 = 1$$

soluzione

$$y(x) = k_1 \cos x + k_2 \sin x =$$

$$= \sin x \qquad (k_1 = 0,\ k_2 = 1).$$

L'unica funzione che risolve il problema di Cauchy è $y(x) = \sin x$ .

Equaz. lineari del primo ordine.

$$y' = a(x)\, y + b(x)$$

$a, b$ continue.

Es: $y' = \sin x \cdot y + \log x$

Es: $y' = tg x \cdot y^2 + e^x$

non è lineare

---

Se $b(x) = 0$ l'equazione si dice omogenea.

$$y' = a(x)\, y.$$

Siano $y_1$ e $y_2$ soluzioni dell'omogenea.

Considero $y = y_1 + y_2$

$$y' = y_1' + y_2' = a(x) y_1 + a(x) y_2$$

$$= a(\underbrace{y_1 + y_2}_{y}) = a(x) \cdot y .$$

la somma di 2 soluzioni è ancora soluzione.

Se $y_1$ è soluzione e $k \in \mathbb{R}$ allora $y(x) = k\, y_1(x)$ è soluzione. Infatti

$$y' = k\, y_1' = k\,(a(x)\, y_1) =$$

$$= a(x)\,(k\, y_1) = a(x)\, y.$$

Equazione completa

$$y' = a(x)y + b(x)$$

Sia $A(x)$ una primitiva di $a(x)$. Cioè $A' = a$

moltiplico l'equazione per $e^{-A(x)}$

$$y' e^{-A(x)} = a(x) e^{-A(x)} y(x) + b(x) e^{-A(x)}$$

$$\underbrace{y' e^{-A(x)} - y(x)\, a(x)\, e^{-A(x)}} = b(x) e^{-A(x)}$$

$$\frac{d}{dx}\left(y e^{-A(x)}\right) = b(x) e^{-A(x)}$$

integro

$$y\,e^{-A(x)} = \int b(x)e^{-A(x)}dx + c$$

$$y(x) = e^{A(x)}\left(\int b(x)e^{-A(x)}dx + c\right)$$

tutte e sole le soluzioni dell'equaz. $y' = a(x)y + b(x)$.

Es: $y' = x^2 y + x^2$

$a(x) = x^2 \qquad b(x) = x^2$

$A(x) = \int a(x)\,dx = \int x^2\,dx$

$= \frac{x^3}{3}$

devo calcolare

$$\int e^{-A(x)} b(x)\,dx =$$

$$= \int e^{-\frac{x^3}{3}} x^2\,dx =$$

$x^3 = t \Rightarrow 3x^2\,dx = dt$

$$= \int e^{-\frac{t}{3}} \cdot \frac{dt}{3} = \frac{1}{\cancel{3}} e^{-\frac{t}{3}} \left(\cancel{-3}\right) =$$

$$= -e^{-t/3} = -e^{-\frac{x^3}{3}} \quad (t = x^3)$$

$$y(x) = e^{A(x)}\left(\int b(x)\, e^{-A(x)}\, dx + c\right) =$$

$$= e^{\frac{x^3}{3}}\left(-e^{-\frac{x^3}{3}} + c\right)$$

$$= -1 + c\, e^{\frac{x^3}{3}}.$$

# Problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x^2 y + x^2 \\ \boxed{y(3) = 2} \end{cases}$$

$$y(x) = -1 + c\, e^{\frac{x^3}{3}}$$

devo trovare $c$ usando la condizione

$$2 = y(3) = -1 + c\,e^{\frac{3^3}{3}} =$$

$$= -1 + c\,e^{9}$$

$$\Rightarrow 2 = -1 + c\,e^{9}$$

$$3 = c\,e^{9} \Rightarrow c = 3 \cdot e^{-9}$$

$$\Rightarrow y(x) = -1 + 3 \cdot e^{-9}\, e^{\frac{x^3}{3}}.$$

unica soluzione

Se invece considero

$$\begin{cases} y' = x^2 y + x^2 \\ y(3) = -1 \end{cases}$$

$$y(x) = -1 + c\, e^{\frac{x^3}{3}}$$

$$\cancel{-1} = \cancel{-1} + c \cdot e^{\frac{3^3}{3}}$$

$$c\, e^{9} = 0 \qquad c = 0$$

soluzione $\quad y(x) = -1 \quad \forall x$

costante.

soluzioni di $y' = x^2 y + x^2$